Wykład 3
Ruch drgający

Dr Henryk Jankowski

2010/2011

Mielec_studia niestacjonarne

Teoria drgań

- **częstość drgań podstawowych struny** – **Brook Taylor** (1713)

- **równanie różniczkowe drgań poprzecznych pręta**

  – **Daniel I Bernoulli, L. Euler** (1734)

- **analiza prostego oscylatora harmonicznego** – **L. Euler** (1739)

- **sinusoidalne drgania podstawowe**
- **drgania harmoniczne** - **Daniel I Bernoulli** (1755)
- **zasada superpozycji**

RUCH WYWOŁANY SIŁĄ ZMIENNĄ, na przykładzie ruchu drgającego

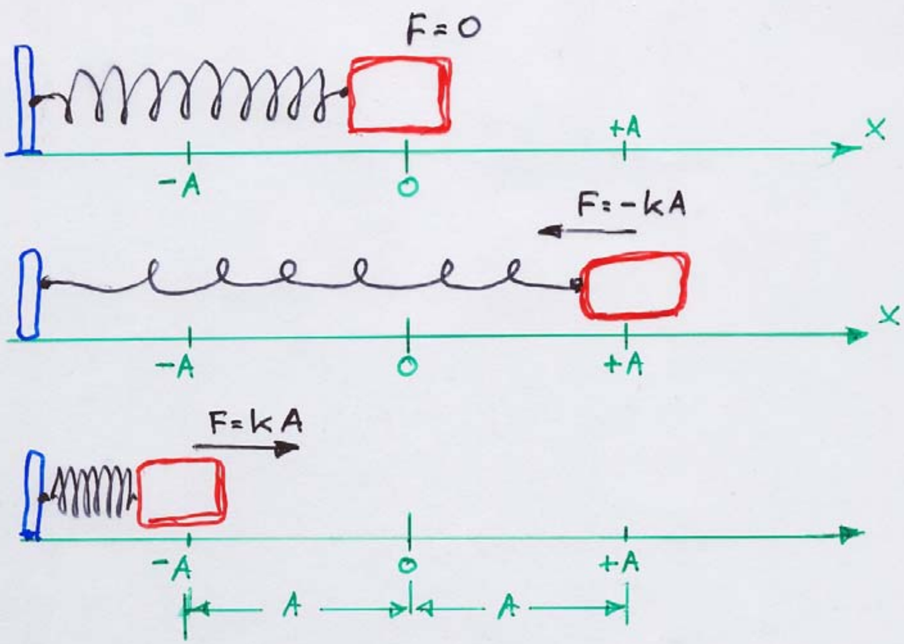
Przypomnienie:

$\vec{F} = 0$ ⇝ prost. ruch jednostajny (lub spoczynek)

$\vec{F} = \text{const}$ ⇝ prost. ruch jednostajnie zmienny

Zakładamy, że na masę m działa siła o postaci $F = -kx$

czyli siła sprężystości (pr. Hooke)



A - amplituda

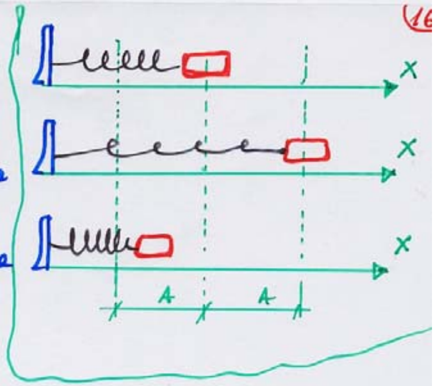
$F = -kx$: siła skierowana do środka ruchu

Ruch wywołany siłą zmienną na przykładzie ruchu drgającego

Opis matematyczny ruchu drgającego_1

Doświadczenie:

Ruch ma charakter oscylacyjny



Opis dowolnego ruchu $x(t)$ wynika z rozwiązania równania wynikającego z II zas. Newtona

$$\boxed{\sum \vec{F_i} = m\,\vec{a}_w}$$

dla badanego ruchu oscylacyjnego:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\cdot a \quad \text{oraz} \quad F = -kx$$

czyli:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) \quad \Big\} \text{ postać niejawna}$$

Funkcję $x(t)$ (czyli opis ruchu) musimy "ujawnić" → tzn. rozwiązać równanie różniczkowe.

Równanie tego typu efektywnie można rozwiązać będąc tylko spostrzegawczym:

1) z obserwacji: funkcja $x(t)$ ma mieć przebieg oscylacyjny

2) „po dwukrotnym zróżniczkowaniu $x(t)$ przechodzi w samą siebie"

Odp:

w/w warunki spełniają funkcje typu: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$,

RUCH DRGAJĄCY

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x(t)$$

17

$x(t) = A\sin\omega t$ ← proporcja

pochodne:

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t$$

równanie:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x(t)$$

$$-mA\omega^2\sin\omega t = -kA\sin\omega t$$

L=P gdy:

$$m\omega^2 = k$$

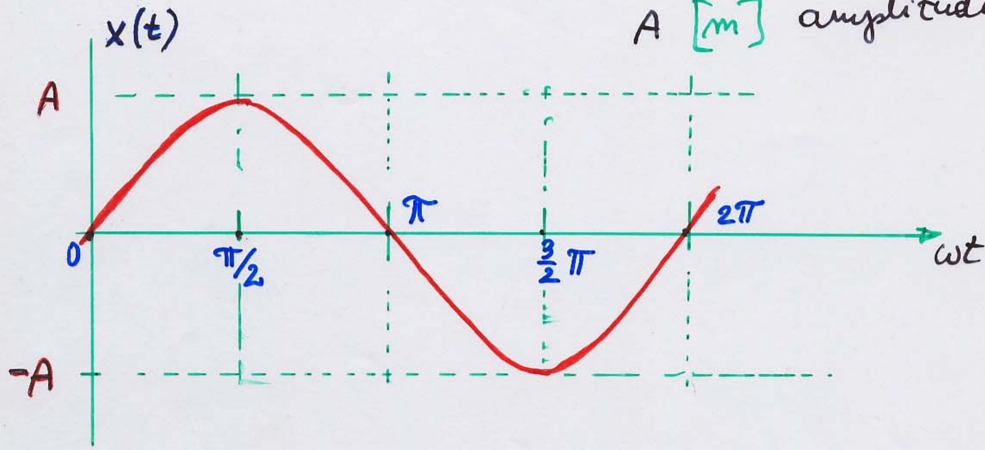
częstość własna $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \left[\frac{1}{s}\right]$

$k\ \left[\frac{N}{m}\right]$ współczynnik sprężystości

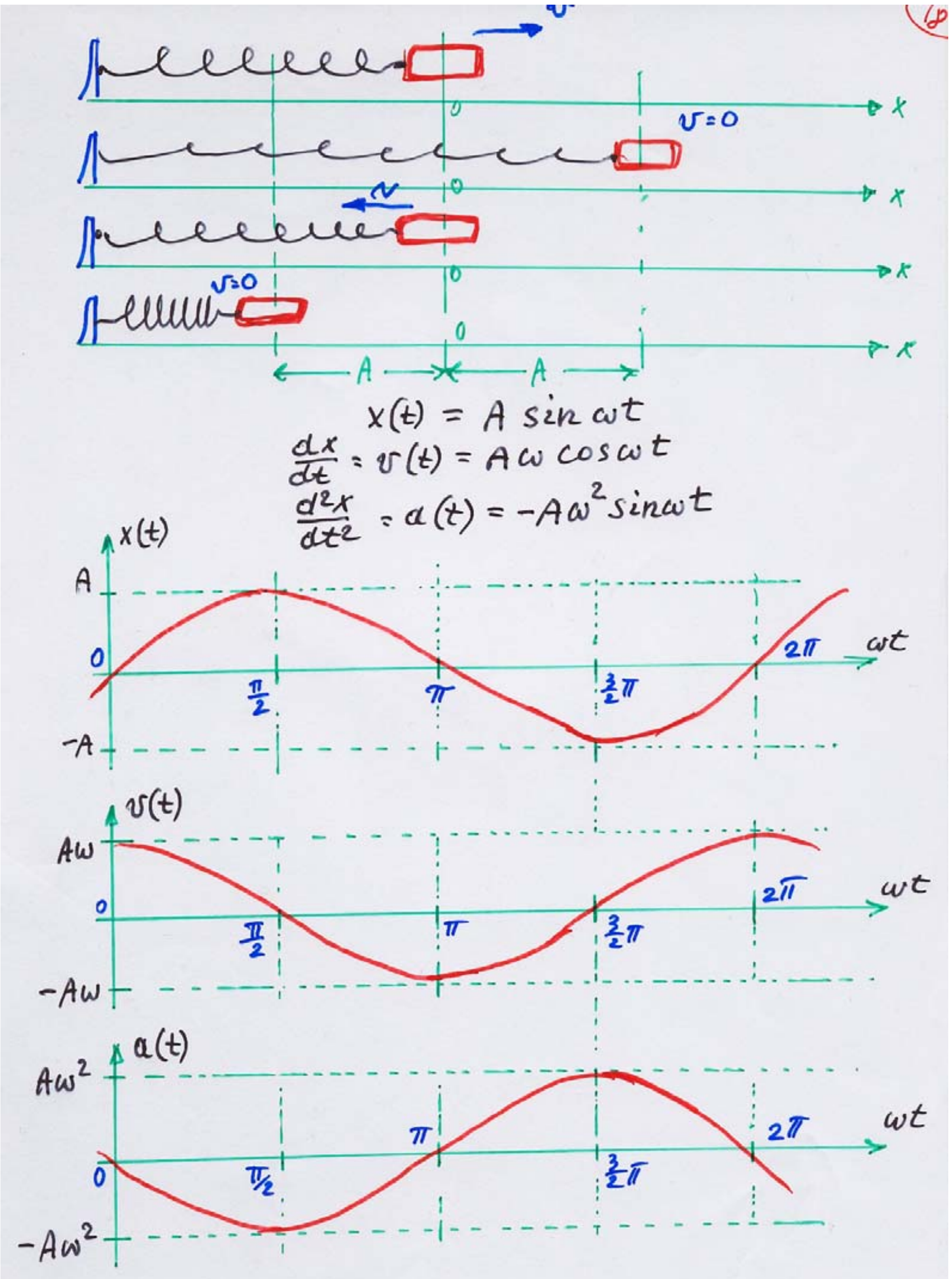
$m\ [kg]$ masa

$\omega\ \left[\frac{1}{s}\right]$ częstość

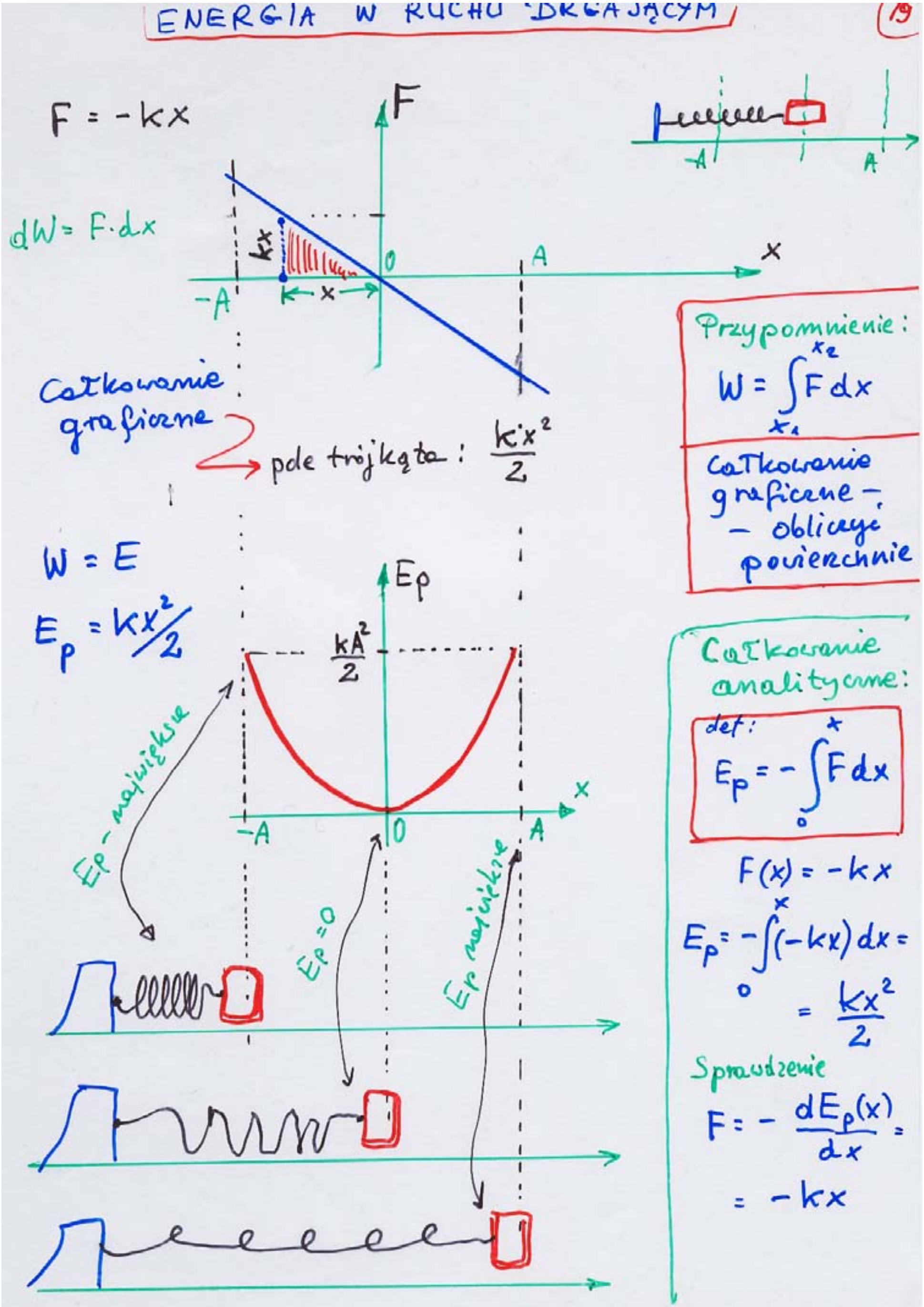
$A\ [m]$ amplituda



Opis matematyczny ruchu drgającego_2



Przebiegi w ruchu drgającym



Energia w ruchu drgającym_1

Energia w ruchu drgającym_2

ENERGIA W RUCHU DRGAJĄCYM (HARMONICZNYM PROSTYM)

(20

Energia potencjalna:

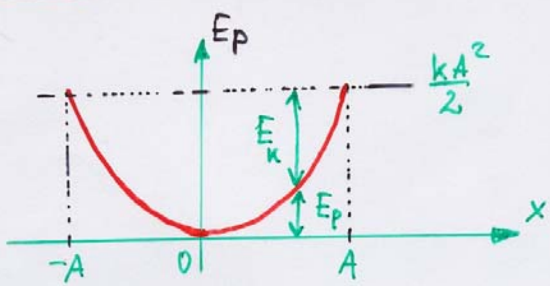
$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

E_p ma też oscylacyjny przebieg w czasie

Charakter oscylacyjny ma również ruch masy (zakres prędkości: $-v_{max}, v_{max}$) pod wpływem siły zachowawczej.

Dlatego:

$$\boxed{E_{całk} = E_p + E_k}$$



$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_c = \frac{kA^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

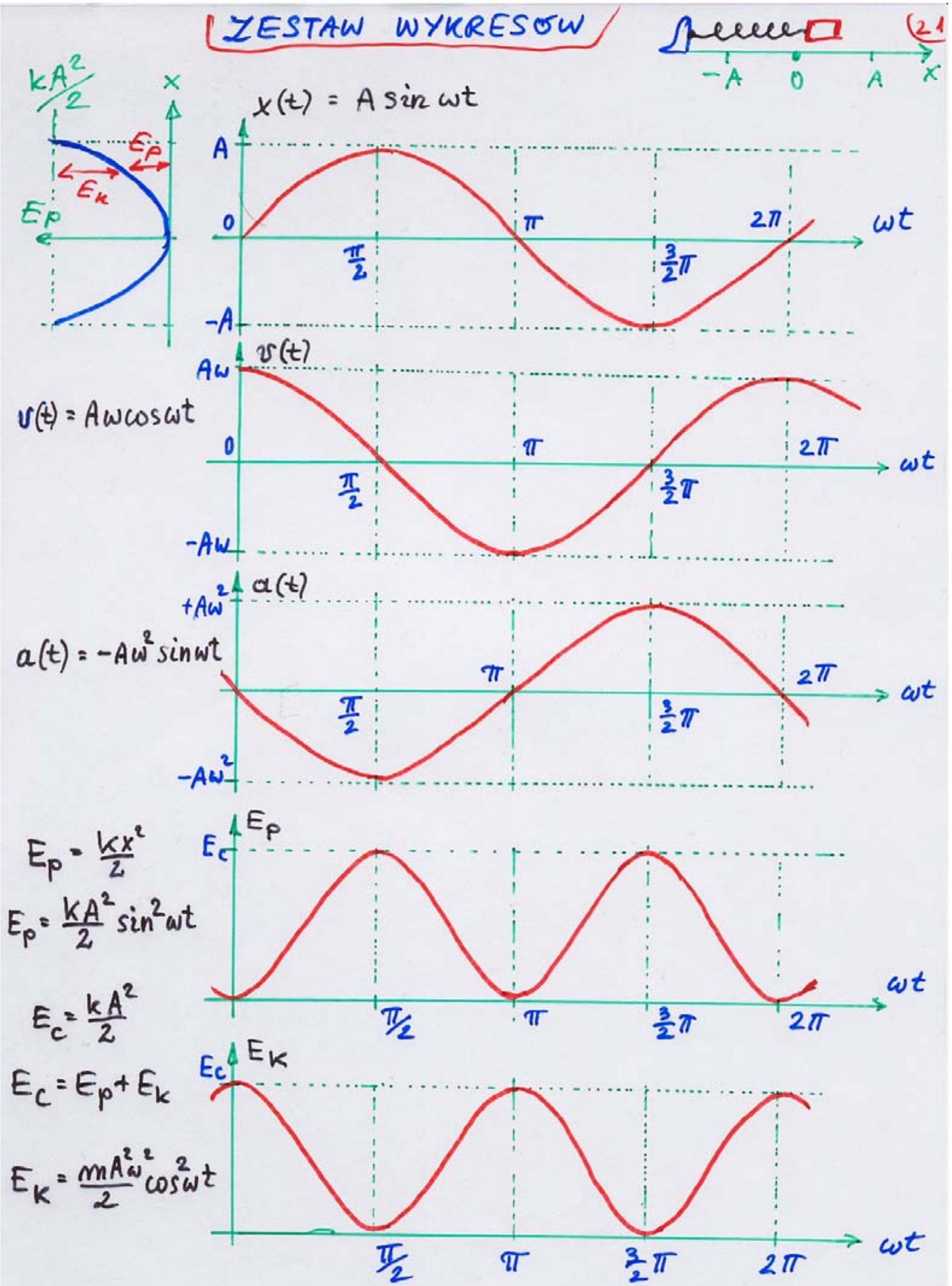
w funkcji czasu

$x(t) = A\sin\omega t$

$v(t) = A\omega\cos\omega t$

$$\boxed{E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2}A^2\sin^2\omega t}$$

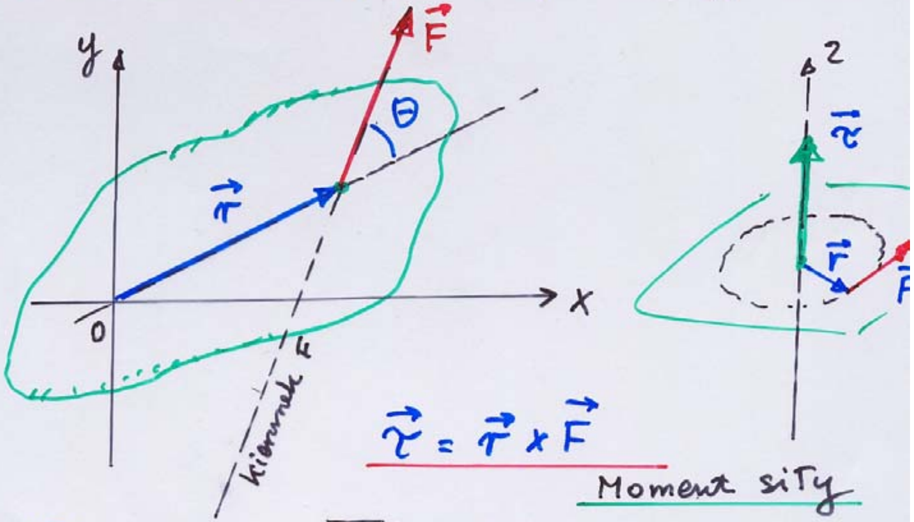
$$\boxed{E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2\omega t}$$



Przebiegi w ruchu drgającym "pełny zestaw"

Ruch drgający
Bryła sztywna_1

Ruch drgający – bryła sztywna



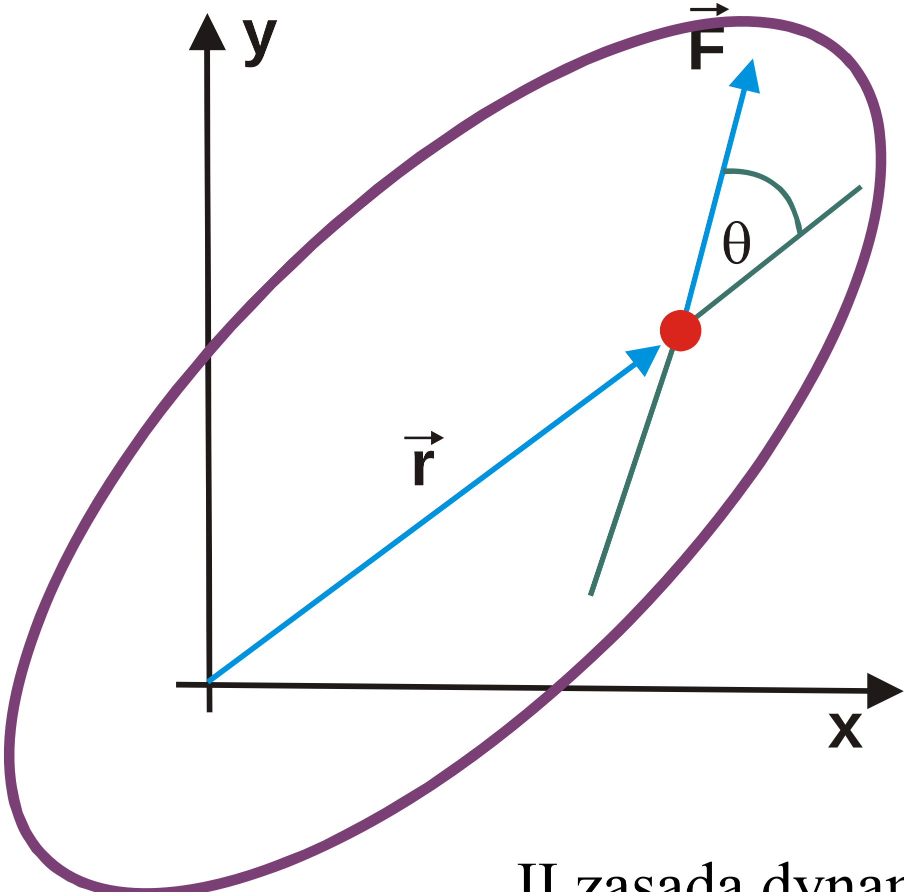
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

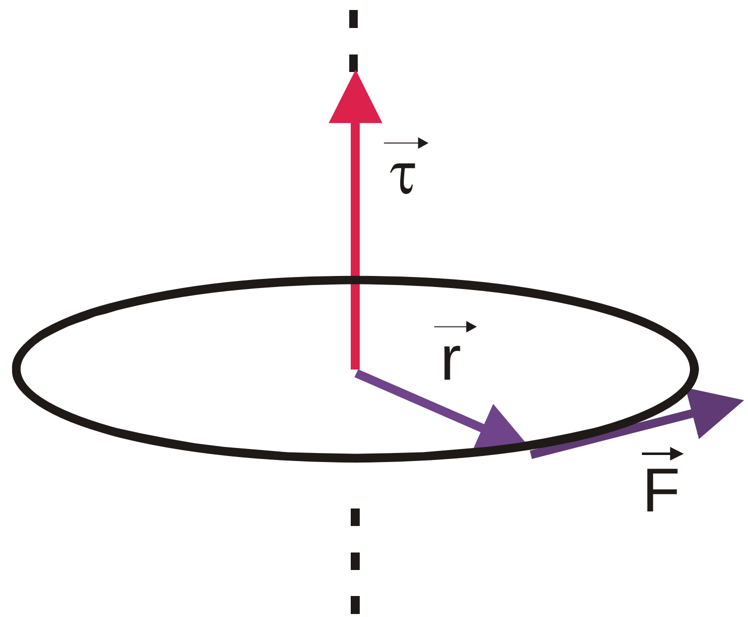
Moment siły

II zasada: $\sum \vec{\tau}_i = I \cdot \vec{\varepsilon}$ $\quad\vec{\varepsilon}$ – przysp. kątowe

Ruch prostoliniowy		Ruch obrotowy	
przemieszczenie liniowe	x	przem. kątowe	Θ
prędkość liniowa	$v = \frac{dx}{dt}$	prędkość kątowa	$\omega = \frac{d\Theta}{dt}$
przysp. liniowe	$a = \frac{dv}{dt}$	przysp. kątowe	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
masa	m	moment bezwładn.	I
siła	$F = m \cdot a$	moment siły	$\tau = I \cdot \varepsilon$
praca	$W = \int F\,dx$	praca	$W = \int \tau\,d\Theta$
E_K	$\frac{1}{2} m v^2$	E_K	$\frac{1}{2} I\omega^2$
moc	$P = F \cdot v$	moc	$P = \tau \cdot \omega$
pęd	$m \cdot v$	moment pędu	$I \cdot \omega$

Ruch drgający-Bryła sztywna_2





Moment siły $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

II zasada dynamiki Newtona $\sum \vec{\tau} = I \cdot \vec{\varepsilon}$

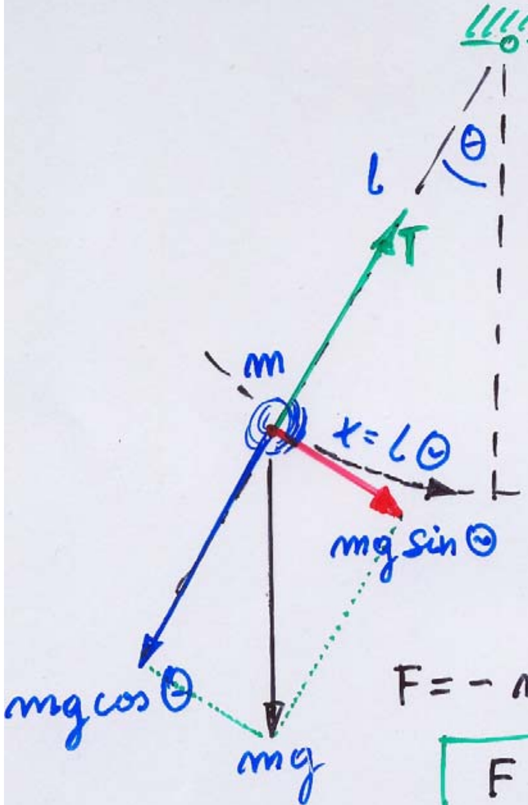
Ruch drgający-Bryła sztywna_3

Ruch prostoliniowy		Ruch obrotowy	
przemieszczenie liniowe	x	przemieszczenie kątowe	θ
prędkość liniowa	$v = \frac{dx}{dt}$	prędkość kątowa	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
przyspieszenie liniowe	$a = \frac{dv}{dt}$	przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
masa	m	moment bezwładności	I
siła	$F = m \cdot a$	moment siły	$\tau = I \cdot \varepsilon$
praca	$W = \int F \cdot dx$	praca	$W = \int \tau \cdot d\theta$
energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
moc	$P = F \cdot v$	moc	$P = \tau \cdot \omega$
pęd	$p = m \cdot v$	moment pędu	$p = I \cdot \omega$

Wahadło proste matematyczne_1

WAHADŁO PROSTE – MATEMATYCZNE

– obiekt wyidealizowany



siła "zawracająca"

$$F = -mg \sin\Theta$$

Przemieszczenie wzdłuż łuku:

$$x = l\Theta$$

Przybliżenie "małych przemieszczeń"

$$\sin\Theta \cong \Theta$$

$$F = -mg\Theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$$

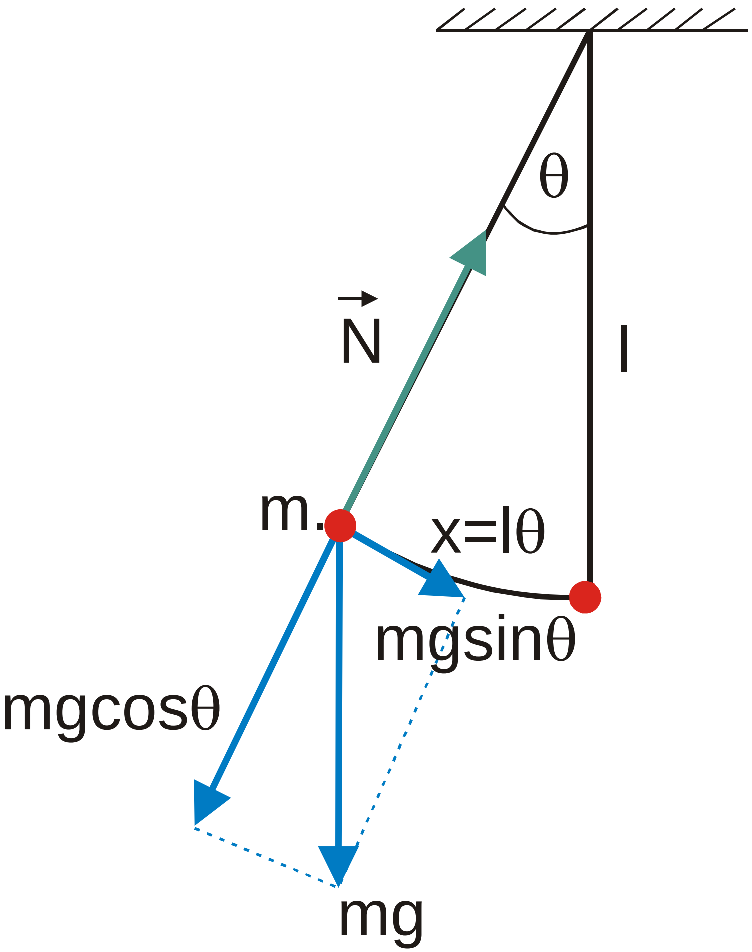
$$\boxed{F = -kx}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

dla wahadła: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Wahadło proste_matematyczne_2

obiekt
wyidealizowany



siła „zawracająca:

$$F = -mg\sin\theta$$

przemieszczenie wzdłuż łuku

$$x = l\theta$$

przybliżenie „małych przemieszczeń”

$$\sin\theta \cong \theta$$

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$$

$$F = -kx$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

dla wahadła

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Wahadło fizyczne_1

#2

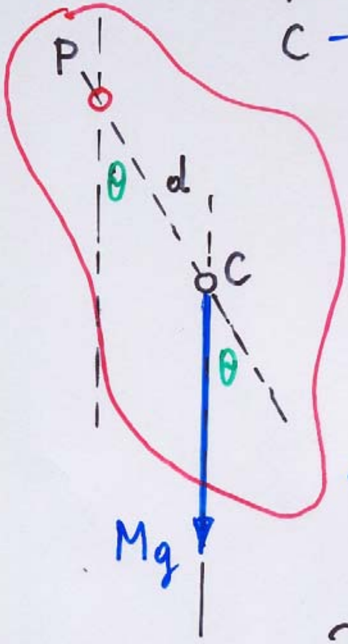
WAHADŁO FIZYCZNE

P – oś obrotu

C – środek masy

I – moment bezwładności względem P

M – masa ciała



Moment "zawracający"

$$\tau = -Mgd\sin\Theta$$

Przybliżenie "małych amplitud"

$$\sin\Theta \cong \Theta$$

$$\tau = -M\cdot g\cdot d\cdot\Theta$$

jeżeli $\varkappa = Mgd$; $\tau = -\varkappa\Theta$

jednocześnie: $\tau = I\dfrac{d^2\Theta}{dt^2} = I\cdot\varepsilon$

wtedy: $\dfrac{d^2\Theta}{dt^2} = \dfrac{\tau}{I} = -\dfrac{\varkappa\Theta}{I}$

dla ruchu harmonicznego: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{\varkappa}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{Mgd}}$

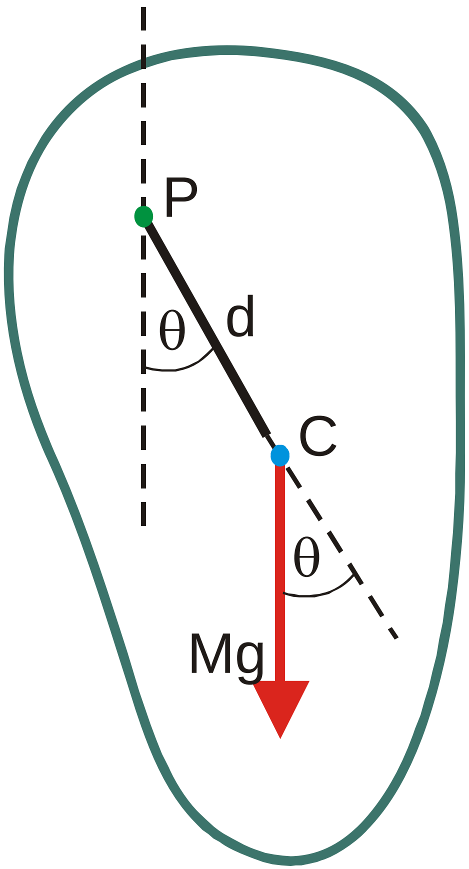
Wahadło fizyczne_2

P oś obrotu

C środek masy

I moment bezwładności względem P

M masa ciała



Moment „zawracający”

$$\tau = -Mg\sin\theta$$

Przybliżenie „małych amplitud”

$$\sin\theta \cong \theta$$

$$\tau = -Mgd\theta$$

Jeżeli $\kappa = Mgd$; $\tau = -\kappa \cdot \theta$

Jednocześnie: $\tau = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = I\varepsilon$

Wtedy: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{\tau}{I} = -\dfrac{\kappa \cdot \theta}{I}$

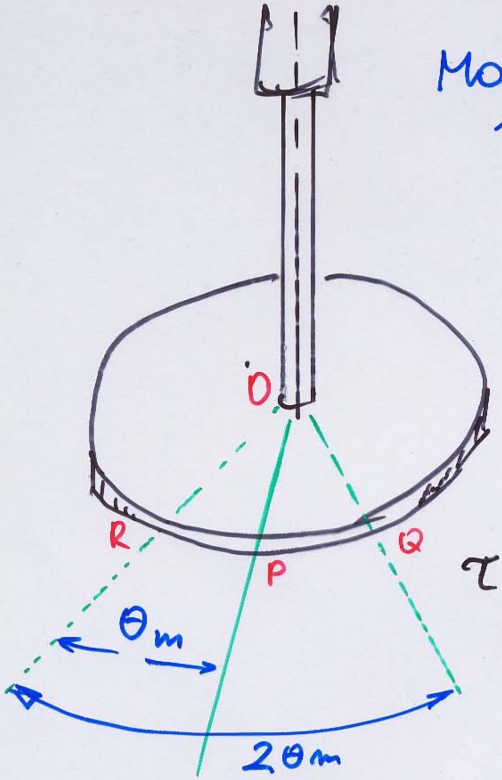
Dla ruchu harmonicznego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

Wahadło torsyjne_1

WAHADŁO TORSYJNE

H3



Moment siły skręconego drutu τ

$$\tau = -\varkappa \Theta$$

$\varkappa$ – stała skręcenia (moment kierujący)

Równanie ruchu:

$$\tau = I\varepsilon = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\Theta}{dt}$$

$$-\varkappa\Theta = I\frac{d^2\Theta}{dt^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\varkappa}}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

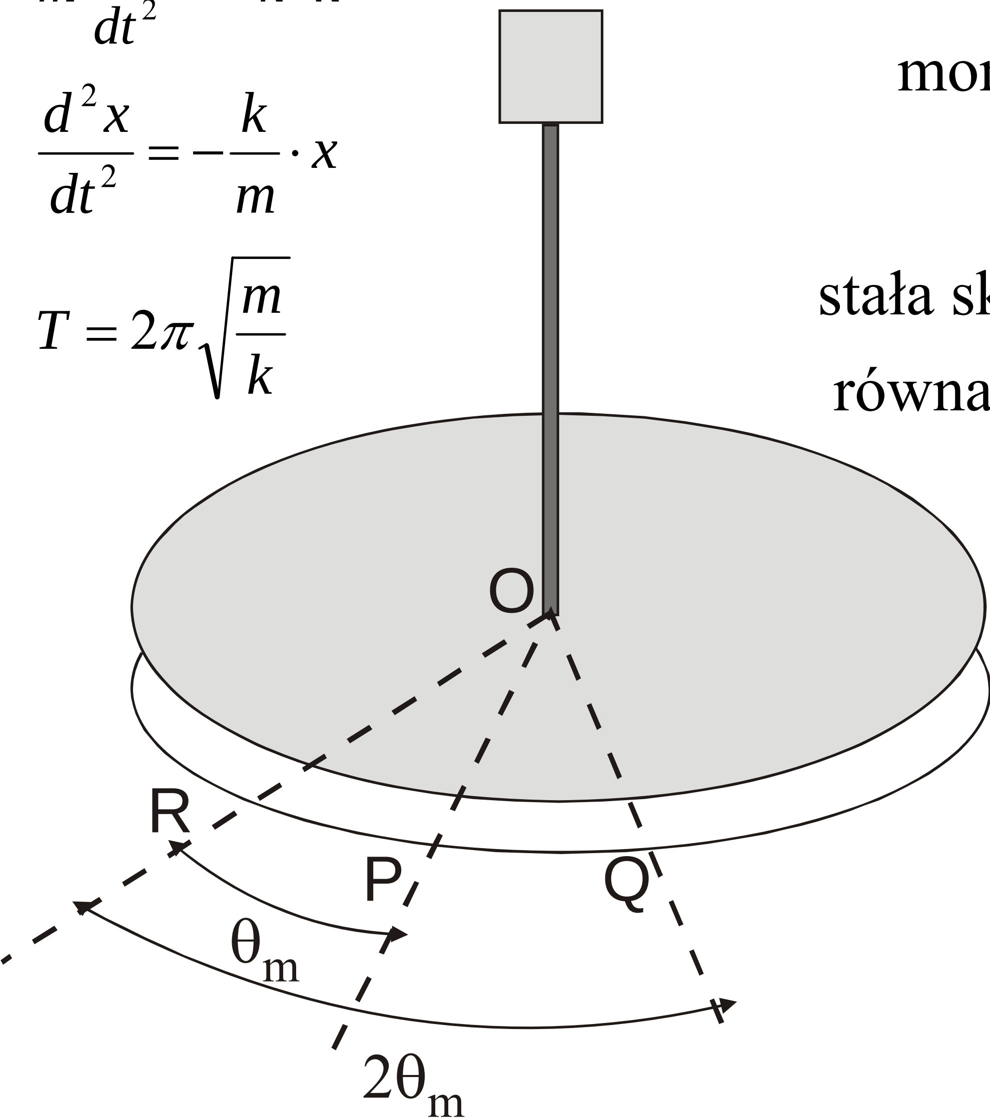
waga Cavendisha

Wahadło torsyjne_2

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



moment siły skręconego drutu τ

$$\tau = -\kappa \cdot \theta$$

stała skręcenia (moment kierujący) κ

równanie ruchu

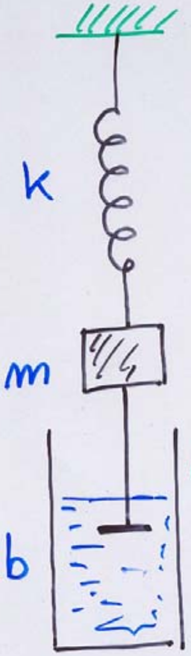
$$\tau = I \cdot \varepsilon = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-\kappa \cdot \theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

H4

RUCH HARMONICZNY TŁUMIONY



zjawisko tarcia - oporu

$$F_t = -b\frac{dx}{dt} = -bv$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = 0$$

$$m\frac{dv}{dt} + b\cdot v = 0$$

$$\tau = \frac{m}{b}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}\cdot v = 0$$

Rozwiązanie:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$$

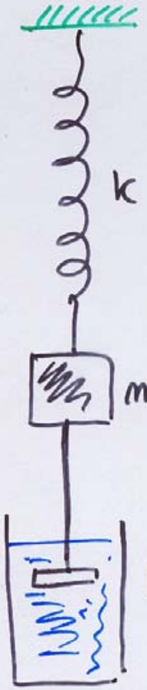
$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt \rightarrow \ln v - \ln v_0 = -\frac{t}{\tau}$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

Ruch harmoniczny tłumiony_1

RUCH HARMONICZNY TŁUMIONY

H5



Równanie ruchu:

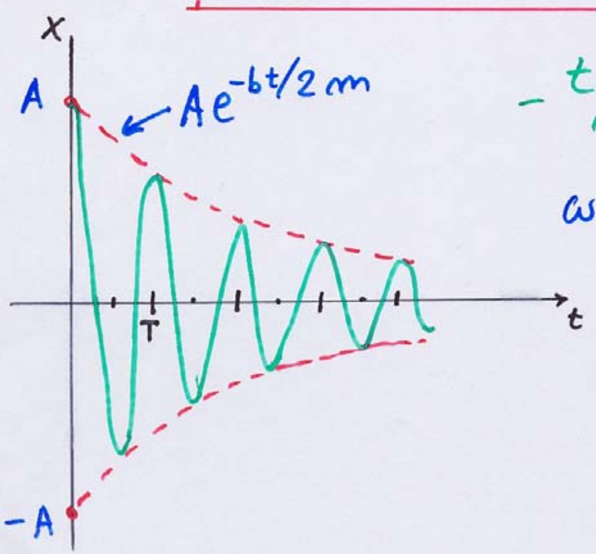
$$F = m \cdot a$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Jeżeli tarcie jest małe rozwiązanie ma postać:

$$\boxed{\begin{gathered} x = A\,e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \varphi) \\ \omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \end{gathered}}$$



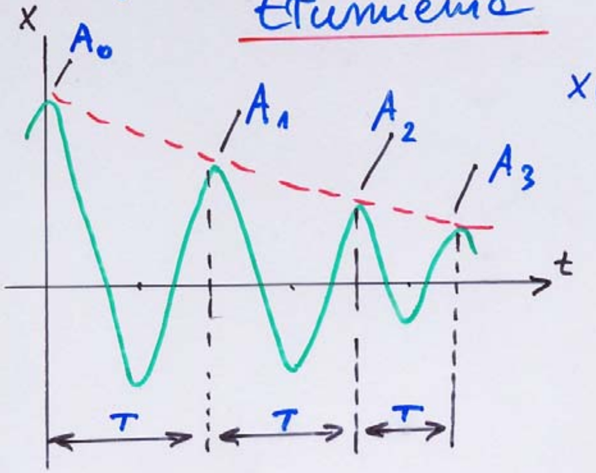
– tarcie "spowalnia" ruch

$$\omega' < \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ruch harmoniczny tłumiony_2

H6

Logarytmiczny dekrement tłumienia



$$x(t) = A e^{\frac{-bt}{2m}} \cos \omega' t$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$A_1 = A_0 e^{-\beta \cdot T}, \quad A_2 = A_0 e^{-2\beta T}, \; \ldots \; A_n = A_0 e^{-n\beta T}$$

$$A_{n+1} = A_0 \cdot e^{-(n+1)\beta T} = A_0 e^{-n\beta \cdot T} \cdot e^{-\beta T}$$

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-n\beta T}}{A_0 e^{-n\beta T} \cdot e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \beta \cdot T$$

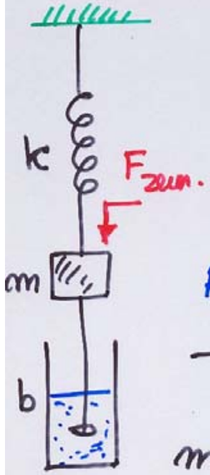
$$A' = A_0 \cdot e^{-\frac{\Lambda}{T} t}$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia_3

Drgania wymuszone i rezonans_4

Drgania wymuszone i rezonans

H7



$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega' = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

siła zewnętrzna:

$$F_m \cos\omega'' t$$

Równanie ruchu:

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_m \cos\omega'' t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos\omega'' t$$

Rozwiązanie (bez dowodu):

$$x = \frac{F_m}{G}\sin(\omega'' t - \varphi)$$

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2}$$

$$\varphi = \arccos\frac{b\omega''}{G}$$

Wnioski:

- Układ drga z częstością siły wymuszającej
- Amplituda $A = \frac{F_m}{G}$ zależy od ω'', ω i b

Ruch harmoniczny tłumiony_5

48

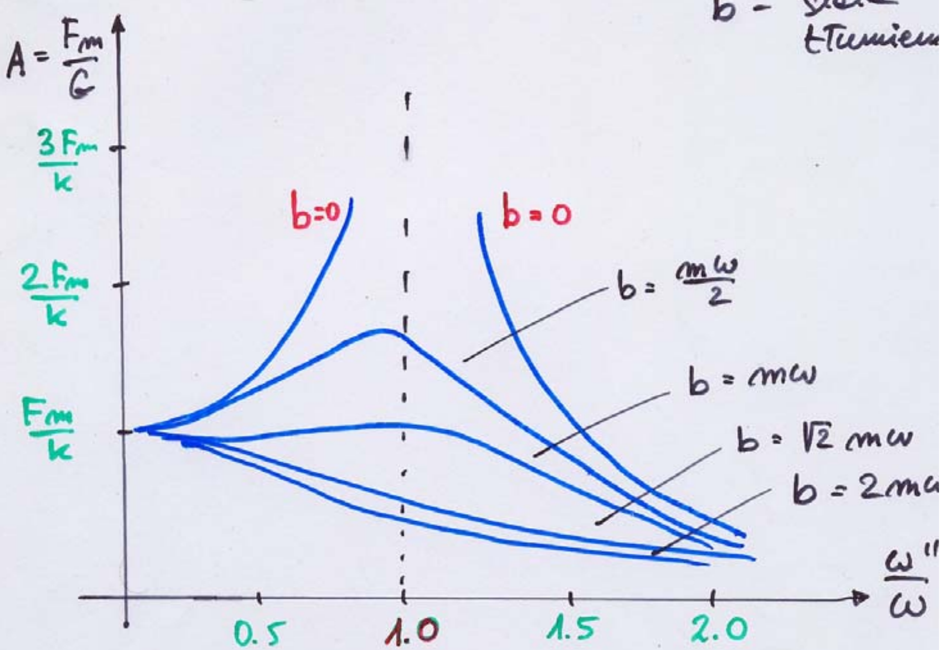
Drgania wymuszone i rezonans

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos\omega'' t$$

$$x = \frac{F_m}{G}\sin(\omega'' t - \varphi)$$

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2}$$

b - stała tłumien[ia]



Zjawisko rezonansu!